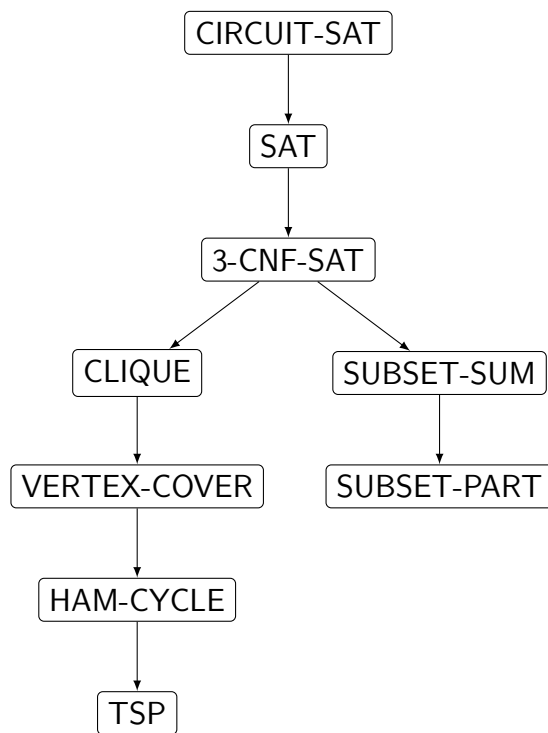


Lista 04 de Análise de Algoritmos

Turma do 4^o ano

1^o Período de 2023

Reduções Conhecidas¹



¹Apresentados em Algoritmos (Cormen)

Descrições dos problemas

CIRCUIT-SAT Dado um circuito booleano, determinar se existe uma entrada que terá output verdadeiro

SAT Dada uma expressão booleana, determinar se existe uma interpretação para as variáveis que satisfaça a expressão

3-CNF-SAT Dada uma expressão booleana formada por conjunções de fórmulas formadas pela disjunção de 3 variáveis (ou sua negação). Determinar se existe uma interpretação para as variáveis que satisfaça a expressão

CLIQUE Um clique em um grafo simples $G = (V, E)$ é um subconjunto de vértices V' tal que todo vértice de V' esteja ligado a todo vértice de V' . O tamanho deste clique é a quantidade de vértices em V' . O problema é responder se existe um clique de tamanho igual a algum k dado na entrada.

$\text{CLIQUE} = \{ \langle G, k \rangle : G \text{ é um grafo com clique de tamanho igual a } k \}$

VERTEX-COVER O problema da cobertura de vértices é encontrar uma cobertura de vértices de tamanho k . Uma cobertura de vértices é um subconjunto S de vértices, tal que, toda aresta do grafo seja incidente a pelo menos um dos vértices da cobertura S . O tamanho de uma cobertura é uma quantidade de vértices que ela tem.

$\text{VERTEX-COVER} = \{ \langle G, k \rangle : G \text{ é um grafo que tem uma cobertura de vértices de tamanho igual a } k \}$

HAM-CYCLE O problema do ciclo hamiltoniano é, em um grafo simples não direcionado, encontrar um ciclo que passe por cada vértice exatamente uma vez.

$\text{HAM-CYCLE} = \{ \langle G \rangle : G \text{ tem um ciclo hamiltoniano} \}$

TSP O problema do caixeiro viajante é, em um grafo simples, completo e com peso nas arestas, encontrar um ciclo que passe exatamente uma vez por todos os vértices e tenha custo menor ou igual a k . O custo de um ciclo é a soma do custo das arestas pelas quais ele passa.

$\text{TSP} = \{ \langle G, k \rangle : G \text{ tem um ciclo hamiltoniano de custo menor ou igual a } k \}$

SUBSET-SUM Temos um conjunto S de números inteiros e um número inteiro t . O problema é responder se existe um subconjunto de S tal que a soma de todos elementos resulte em t .

$$\text{SUBSET-SUM} = \{ \langle S, t \rangle : \text{existe um subconjunto } S' \subseteq S \text{ tal que } t = \sum_{s \in S'} s \}$$

SUBSET-PART O problema da partição de um conjunto é, dado um conjunto, dizer se há como particionar em dois subconjunto tal que a soma seja igual.

$$\text{SUBSET-PART} = \{ \langle S, t \rangle : \text{existe uma partição de } S, \text{ dada por dois conjuntos } A \text{ e } \bar{A}, \text{ tal que } \sum_{a \in A} a = \sum_{a \in \bar{A}} a \}$$

MULTI-SUBSET-SUM Temos um multiconjunto S de números inteiros e um número inteiro t . O problema é responder se existe um multisubconjunto de S tal que a soma de todos elementos resulte em t .

$$\text{MULTI-SUBSET-SUM} = \{ \langle S, t \rangle : \text{existe um multisubconjunto } S' \subseteq S \text{ tal que } t = \sum_{s \in S'} s \}$$

MULTI-SUBSET-PART O problema da partição de um multiconjunto é, dado um conjunto, dizer se há como particionar em dois multisubconjunto tal que a soma seja igual.

$$\text{MULTI-SUBSET-PART} = \{ \langle S, t \rangle : \text{existe uma partição de } S, \text{ dada por dois conjuntos } A \text{ e } \bar{A}, \text{ tal que } \sum_{a \in A} a = \sum_{a \in \bar{A}} a \}$$

Definições :

multiconjunto é um conjunto que permite a repetição de elementos

multisubconjunto é um subconjunto, de um multisubconjunto, que permite a repetição de elementos.

Provar que um problema é NP: dada uma possível solução, descrever um algoritmo polinomial para verificar se esta é uma solução válida para o problema

Provar que um problema é P: exibir um algoritmo polinomial para o problema

Supondo que $P \neq NP$: para esta lista estamos supondo que **não** existe algoritmo polinomial para os problemas apresentados no início desta lista

1. Diga quais dos seguintes problemas pertencem à classe P, quais pertencem à NP, e quais pertencem às duas classes. Justifique a sua resposta.
 - (a) Ordenar um vetor de tamanho n
 - (b) Multiplicar duas matrizes de tamanho $n \times n$
 - (c) Encontrar o caminho mínimo entre dois vértices de um grafo completo com custo nas arestas
 - (d) Encontrar um caminho com custo menor que um dado k , entre dois vértices de um grafo completo, com custo nas arestas
 - (e) Dado um grafo simples, encontrar um subconjunto S , de tamanho k , de vértices neste grafo, tal que todos os vértices deste subconjunto S esteja ligado a todos os vértices do próprio subconjunto S
 - (f) Dado um grafo simples, encontrar um subconjunto S , de tamanho k , de vértices neste grafo, tal que todos os vértices deste subconjunto S esteja ligado a todos os vértices do conjunto V de vértices do grafo

2. Mostre que os seguintes problemas são NP
 - (a) TSP
 - (b) CLIQUE
 - (c) VERTEX-COVER
 - (d) HAM-CYCLE
 - (e) SUBSET-PART

3. Mostre que os seguintes problemas são NP-Completo
- (a) Problema da rota de veículos: Dado um grafo $G = (V, E)$ simples, completo, com custo nas arestas. Dado um subconjunto $T \subseteq V$, dado um número real k . Encontrar um conjunto de ciclos, tal que, cada ciclo passe por exatamente um vértice de T ; todo vértice de V esteja em um ciclo; e a soma dos custos de todos os ciclos seja menor ou igual a k . (Considere que vértices sozinhos formam um ciclo)
 - (b) Problema do conjunto independente: Dado um grafo $G = (V, E)$ simples, encontrar um subconjunto $S \subseteq V$ tal que cada vértice de S não seja vizinho a nenhum vértice de S . (Dica: reduza o problema do CLIQUE para este)
4. Bonnie e Clyde roubaram um banco e agora querem dividir os ganhos, mas será que o que eles roubaram pode ser dividido igualmente? Verifique em quais das situações é possível encontrar um algoritmo polinomial para dividir os ganhos. Justifique a sua resposta.
- (a) Todas as notas roubadas tem o mesmo valor.
 - (b) Todo material roubado são cheques, endereçado a eles, com valores diferentes um do outro.
 - (c) A mesma situação do item anterior, mas desta vez eles aceitam que a divisão tenha uma diferença de 10 reais.